PITAGORAS
ACADEMIA

ARITMÉTICA

Profesor
Fortunato Mendoza

NÚMEROS RACIONALES

NÚMEROS N-AVALES

NÚMEROS DECIMALES
CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS DECIMALES

$f = \frac{A}{B}$ → Exacto / Periódico Puro / Periódico Mixto

I. NÚMERO DECIMAL EXACTO

Ejemplos:

$\frac{7}{2^3} = 0{,}875$ → Pte. decimal

$\frac{4}{5^2} = 0{,}16$

$\frac{417}{2^5.5^3} = 0{,}10425$

Aplicaciones:

$f_{pi} = \frac{k}{2^3.5^4} = 0{,}abcd$

$f_{pi} = \frac{k}{2^6.5^4} = 0{,}abcdef$

Ejercicio

Sea $f = \frac{13000}{2^{18} \times 5^{14}}$

1°) Simplificando

$f = \frac{13 \times 2^3 \times 5^3}{2^{18} \times 5^{14}}$

$f_I = \frac{13}{2^{15} \times 5^{11}}$

2°) Pte. decimal: 15 cifras

II. NÚMERO DECIMAL PERIÓDICO PURO

Ejemplos:

* $\frac{5}{11} = 0,\overline{45}$ ↳ periodo

OBS.: $\begin{array}{r|l} 99 & 11 \\ \hline - & 9 \end{array}$

* $\frac{4}{27} = 0,\overline{148}$

OBS.: $\begin{array}{r|l} 999 & 27 \\ \hline - & 37 \end{array}$

Tabla de los "nueves"

$$9 = 3^2$$
$$99 = 3^2.11$$
$$999 = 3^3.37$$
$$9999 = 3^2.11.101$$
$$99999 = 3^2.41.271$$
$$999999 = 3^3.11.37.7.13$$

Aplicaciones:

$$f_{pi} = \frac{k}{37} = 0,\overset{\frown}{abc}$$

$$f_{pi} = \frac{k}{101} = 0,\overset{\frown}{abcd}$$

$$f_{pi} = \frac{k}{41} = 0,\overset{\frown}{abcde}$$

$$f_{pi} = \frac{k}{7} = 0,\overset{\frown}{abcdef}$$

Ejemplo

$2 \times 5 \times 7 \times 19$

Sea $f = \frac{1330}{101 \times 13 \times 7} = \frac{190}{101 \times 13}$

Obs $101 \rightarrow 4$ cifras
$13 \rightarrow 6$ cifras $>$ MCM$(4;6) = 12$

$\therefore$ Periodo tendrá 12 cifras

III. PARA NÚMEROS DECIMALES PERIÓDICOS MIXTOS

Ejemplos:

* $\frac{23}{2^3.11} = 0{,}261\overline{36}$ → Pte periodica → Pte no periodica

* $\frac{47}{5^2.27} = 0{,}06\overline{962}$

* $\frac{193}{2^4.5^2.11} = 0{,}043\overline{863}$

Aplicaciones:

$$f_{pi} = \frac{k}{2^4.5^2.27} = 0{,}xyzw\overset{\frown}{abc}$$

$$f_{pi} = \frac{k}{2^2.5^3.13} = 0{,}xyz\overset{\frown}{abcdef}$$

Ejemplo

Sea $f = \frac{1900}{2^{10} \times 5^{13} \times 41 \times 7}$ $\quad 19 \times 2^2 \times 5^2$

1°) $f_I = \frac{19}{2^8 \times 5^{11} \times 41 \times 7}$

2°) Pte no periodica: 11 cifras

Pte periodica: 30 cifras

Las $41 \rightarrow 5$ cifras
$7 \rightarrow 6$ cifras $> MCM(5;6) = 30$

CONVERSIÓN DE N-AVAL A FRACCIÓN

Caso 1: Para n-aval exacto

Ejemplos:

En base 10

* $0{,}435 = \dfrac{435}{1\,000}$

* $0{,}48 = \dfrac{48}{100}$

En base ≠ 10

* $0{,}2134_{(6)} = \dfrac{2134_{(6)}}{10000_{(6)}}$

* $0{,}425_{(8)} = \dfrac{425_{(8)}}{1000_{(8)}}$

Caso 2: Para n-aval periódico puro

Ejemplos:

En base 10

* $0{,}\overline{421} = \dfrac{421}{999}$

* $0{,}\overline{2463} = \dfrac{2463}{9999}$

En base ≠ 10

* $0{,}\overline{3121}_{(6)} = \dfrac{3121_{(6)}}{5555_{(6)}}$

* $0{,}\overline{216}_{(8)} = \dfrac{216_{(8)}}{777_{(8)}}$

Caso 3: Para n-aval periódico mixto

Ejemplos:

En base 10

* $0,182\overline{73} = \dfrac{18273 - 182}{99000} = \dfrac{18091}{99000}$

* $0,21\overline{438} = \dfrac{21438 - 21}{99900} = \dfrac{21417}{99900}$

En base ≠ 10

* $0,23\overline{431}_{(6)} = \dfrac{23431_{(6)} - 23_{(6)}}{55500_{(6)}}$

* $0,2\overline{53}_{(8)} = \dfrac{253_{(8)} - 2_{(8)}}{770_{(8)}}$

Casos Particulares:

* $4,2\overline{678} = \dfrac{42678 - 42}{9990} = \dfrac{42636}{9990}$

* $2,\overline{546} = \dfrac{2546 - 2}{999} = \dfrac{2544}{999}$

* $3,462 = \dfrac{3462}{1000}$

DESCOMPOSICIÓN DE LOS NÚMEROS N-AVALES

$$0{,}abcd = \frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{d}{10^4}$$

$$0{,}abcd_{(n)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \frac{d}{n^4}$$

$$0{,}\overline{34} = \frac{3}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \dots$$

$$0{,}\overline{21}_{(5)} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \dots$$

$$0{,}4\overline{23}_{6} = \frac{4}{6} + \frac{2}{6^2} + \frac{3}{6^3} + \frac{2}{6^4} + \frac{3}{6^5} + \dots$$

Aplicación:

Calcular

$$E = \frac{2}{7} + \frac{5}{7^2} + \frac{2}{7^3} + \frac{5}{7^4} + \dots$$

Resolución:

$$E = 0{,}\overline{25}_{(7)}$$

$$E = \frac{25_{(7)}}{66_{(7)}} = \frac{19}{48}$$

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

01. ¿Cuántas cifras tiene la parte periódica en el desarrollo decimal de la fracción

$$\frac{1}{3861}?$$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

Resolución:

Sea $f = \frac{1}{3861}$

$f = \frac{1}{3^3 \cdot 11 \cdot 13}$

Obs $27 \rightarrow 3$ cf
$11 \rightarrow 2$ cf
$13 \rightarrow 6$ cf

$\text{MCM}(3; 2; 6) = 6$

$\therefore$ Periodo tendrá 6 cf.

02. Cuántas cifras en la parte no periódica tiene la siguiente fracción: 125/N, si:

$$N = \underbrace{3000\ldots00}_{121\text{ cifras}}{}_{(5)}$$

A) 117 B) 90 C) 121
D) 120 E) 128

Resolución:

$$N = \underbrace{3\,00\ldots00}_{121\text{ cifras}}{}_{(5)} = 3\times5^{120}$$

Sea $f = \dfrac{125}{N} = \dfrac{5^3}{3\times5^{120}}$

Simplificando

$$f_I = \frac{1}{5^{117}\cdot 3} \rightarrow \text{DPM}$$

$\therefore$ Pte. no periódica: 117 cifras

05. ¿Cuántas cifras origina en la parte no periódica del decimal originado por la fracción: $F = \dfrac{13}{50! - 30!}$?

A) 7 B) 26 C) 27
D) 12 E) 20

$$F_I = \frac{R}{\underbrace{2^{\alpha} \times 5^{\beta}} \cdot k}$$

Pte. no periodica: Mayor exp de 2 y 5

Resolución:

$$F = \frac{13}{50! - 30!} = \frac{13}{30! \cdot 31 \times 32 \times \dots \times 50 - 30!}$$

$$F = \frac{13}{30!(31 \times 32 \dots \times 50 - 1)} = \frac{13}{30!(\dots 9)}$$

$30 \,\underline{|2}$ → 15, $\underline{|2}$ → 7, $\underline{|2}$ → 3, $\underline{|2}$ → 1

$30 \,\underline{|5}$ → 6, $\underline{|5}$ → 1

$$F = \frac{13}{\underbrace{2^{26} \times 5^{7}}\, P(\dots 9)}$$

∴ Pte no periodica: 26 cf.

06. Si: $\frac{a}{5} + \frac{b}{11} = 1,2[36]$. Hallar (a+b)

A) 8 B) 7 C) 10

D) 11 E) 9

NOTA

$1,[21] = 1,\overline{21}$

$1,3[481] = 1,3\overline{481}$

Resolución:

$\frac{a}{5} + \frac{b}{11} = 1,2\overline{36}$

$\frac{11a + 5b}{\cancel{55}_{1}} = \frac{1236 - 12}{\cancel{990}_{18}}$

$11a + 5b = 68 \rightarrow a = 3$

$\quad\;\; \downarrow \quad\;\; \downarrow \qquad\qquad b = 7$

$\;\; 3 \quad\;\; 7$

$\therefore a + b = 10$

Ejercicio:

Calcular la última cifra del periodo originado por la fracción:

$$\frac{6}{47}$$

Resolución

Sea $\frac{6}{47} = 0,\overline{ab\ldots x}$; $x = ??$

$$\frac{6}{47} = \frac{\overline{ab\ldots x}}{99\ldots9}$$

$$\ldots\ldots4 = 47 \cdot \overline{ab\ldots x}$$

$\therefore x = 2$

09. Determine la suma de las dos últimas cifras del periodo originado por la fracción 8/23

A) 9 B) 6 C) 4

D) 8 E) 10

Resolución:

Sea $\frac{8}{23} = 0,\overline{ab\ldots xy} \rightarrow x+y = ??$

$$\frac{8}{23} = \frac{\overline{ab\ldots xy}}{99\ldots99}$$

$$\ldots92 = 23 \cdot \overline{ab\ldots xy}$$

Se cumple

$$\begin{array}{r} \overset{1}{\overline{xy}} \\ \times\ 23 \\ \hline .\ 1\ 2 \\ .\ .\ 8\ \ \\ \hline .\ .\ 9\ 2 \end{array}$$

Así $y = 4$

$x = 0$

$\therefore x + y = 4$

Nota:

* $\frac{38}{10^5} = 0,00038$

* $\frac{46}{10^7} = 0,0000046$

* $\frac{\cdots 8}{10^n} = 0,\underbrace{\cdots\cdots 8}_{n\ cfs}$

$2^{80} = \cdots 6$

$2^{120} = \cdots 6$

03. ¿Cuál es la última cifra del número decimal originado por la fracción: $\frac{7}{5^{20!}}$?

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 7

Resolución:

Sea $f = \frac{7 \times 2^{20!}}{5^{20!} \times 2^{20!}} = \frac{7 \times 2^{20!}}{10^{20!}}$

Obs $2^4 = 16 \rightarrow 2^{4k} = \cdots 6$

Se cumple $2^{20!} = \cdots 6$

Luego $f = \frac{7 \cdot (\cdots 6)}{10^{20!}} = \frac{\cdots 2}{10^{20!}} = 0,\underbrace{\cdots 2}_{20!\ cfs}$

∴ RPTA: 2

04. Al dividir un número entre 27, 81 y 2 se obtiene un entero, un decimal periódico puro y un decimal exacto, respectivamente. ¿Qué tipo de decimal se obtiene al dividirlo entre 972?

A) No periódico
B) Periódico
C) Exacto
D) Periódico puro
E) Periódico mixto

Resolución:

Sea el H N Aent

$\frac{N}{27} = k \rightarrow N = 27k$

$\frac{N}{81} = DPP \rightarrow \frac{27k}{81} = \frac{k}{3} \rightarrow DPP \rightarrow k \neq \dot{3}$

$\frac{N}{2} = D.E. \rightarrow \frac{27k}{2} = D.E \rightarrow k \neq \dot{2}$

Luego

$\frac{N}{972} = \frac{27k}{2^2 \cdot 3^5} = \frac{k}{2 \cdot 3^2} = 0,abc \Rightarrow DPM$

$27 = 3^3$

Clave E

9 3^2

07. Sabiendo que:

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots\ldots}_{\text{n fracciones}} = 0,[96]$$

Calcular "n"

A) 26 B) 32 C) 27

D) 8 E) 20

$$\frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$$

$$\frac{1}{3\times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

Resolución:

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots}_{n \text{ fracc.}} = 0,\overline{96}$$

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{96}{99}$$

$$\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cancel{\ldots}+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{32}{33}$$

$$1-\frac{1}{n+1} = \frac{32}{33} \rightarrow \frac{n}{n+1} = \frac{32}{33}$$

$$\therefore\ n = 32$$

08. Determinar una fracción equivalente a $0,\widehat{2}$ cuyo numerador esté comprendido entre 15 y 35 y su denominador entre 50 y 75. Dar como respuesta la suma de sus términos.

A) 88 B) 55 C) 44
D) 99 E) 22

Resolución:

Sea $f = 0,\widehat{2} = \frac{2}{9} \rightarrow f_E = \frac{2k}{9k}$

$$\left.\begin{array}{l} 15 < 2k < 35 \\ 50 < 9k < 75 \end{array}\right\} \quad k = 8$$

Piden $2k + 9k = 11k = 11(8) = 88$

∴ RPTA: 88

10. Encontrar la fracción propia e irreductible de denominador 125, tal que en su desarrollo como número decimal, cada cifra excede en dos unidades a la cifra que está a su derecha. De como respuesta la suma de cifras del numerador.

A) 7 B) 8 ~~C)~~ 9

D) 10 E) 6

$a = 8$ ✗

Resolución:

Sea $fpI = \frac{N}{125} = 0,(a+4)(a+2)a$

5^3

Obs N y 125 son PESI $\rightarrow N \neq \vdots 5$

$$\frac{N}{\cancel{125}_{1}} = \frac{\overline{(a+4)(a+2)a}}{\cancel{1000}_{8}}$$

$$8N = \overline{(a+4)(a+2)a}$$

$$\underbrace{8N}_{4^{\circ}} = 111a + \underbrace{420}_{4^{\circ}} \rightarrow a = 4^{\circ} \rightarrow a = 4$$

$$8N = 464 \rightarrow N = 108$$

$$\text{Sc fs} = 9$$

11. Si: $\dfrac{a}{\overline{ba}} = 0,[mnp]$, además

$$\frac{1}{\overline{c(b-2)d}} = 0,[wxy3]$$

calcule: a + b + c + d

A) 10 B) 15 C) 13

D) 18 E) 20

$9 = 3^2$

$99 = 3^2 \times 11$

$999 = 3^3 \times 37$

$9999 = 3^2 \times 11 \times 101$

Resolución:

$\dfrac{a}{\overline{ba}} = 0,\overline{mnp} \rightarrow \overline{ba} = \begin{cases} 27 \\ 37 \end{cases}$

$\dfrac{1}{\overline{c(b-2)d}} = 0,\overline{wxy3} \rightarrow \overline{c(b-2)d} = \begin{cases} 101 \\ 101 \times 3 \\ 101 \times 3^2 \end{cases}$

Pero $\overline{c(b-2)d} = 303 \rightarrow b = 2 \rightarrow a = 7$

$c = 3;\ d = 3$

$\therefore\ a + b + c + d = 7 + 2 + 3 + 3$

$= 15$

12. Si:

$$\frac{1}{A+T} = 0,\overset{\frown}{1} \quad y \quad \frac{A}{T} = 0,\overline{ARITMEARITME...}$$

calcular: T - A

A) 3 B) 5 C) 7

D) 2 E) 4

$999999 = 3^3 \times 11 \times 37 \times 7 \times 13$

Resolución:

$\frac{1}{A+T} = 0,\overset{\frown}{1} \longrightarrow \frac{1}{A+T} = \frac{1}{9} \rightarrow A+T=9$

$\frac{A}{T} = 0,\overset{\frown}{ARITME}$

Rb> $T = \begin{cases} 7 \checkmark \\ 13 \times \end{cases} \rightarrow T=7$

Luego $A=2$

$\therefore T-A=5$

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS